

UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

**Dragoslav KUZMANOVIĆ,
Gordana KASTRATOVIĆ, Nenad VIDANOVIĆ**

MEHANIKA 1

Kinematika i Dinamika

V izdanje

BEOGRAD
2024.

Dragoslav Kuzmanović, Gordana Kastratović, Nenad Vidanović
MEHANIKA 1 – Kinematika i Dinamika
V izdanje

Recenzent: dr Predrag Cvetković
dr Radomir Mijailović

Za izdavača: dr Nebojša Bojović, dekan

Glavni i odgovorni urednik: dr Mirjana Bugarinović

Tehnički urednik: Gordana Marjanović

Lektor: Jovanka Cvetković

Korice: Predrag S. Zdravković

Izdavač: Univerzitet u Beogradu – Saobraćajni fakultet,
Vojvode Stepe 305; telefon: 011 3976 017;
faks: 011 3096 704; <http://www.sf.bg.ac.rs>

Priprema: dr Dragoslav Kuzmanović

Štampa: Pekograf DOO,
Vojni put 258/d, 11080 Zemun;
telefon: 011 31 49 166; www.pekograf.com

Tiraž: 300 primeraka

ISBN 978–86–7395–418–9

Na osnovu odluke Uređivačkog odbora Saobraćajnog fakulteta Univerziteta u Beogradu broj 239/2 od 20. februara 2024. godine, odobrava se za upotrebu u nastavi kao osnovni udžbenik na osnovnim studijama za predmet „Mehanika 1”.

Izdavač zadržava sva prava. Reprodukција pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

Sadržaj

Predgovor	ix
-----------------	----

I

Kinematika

1	Kinematika tačke	3
1.1	Položaj tačke	5
1.2	Izvod jediničnog vektora	9
1.3	Konačna jednačina kretanja. Trajektorija. Zakon puta	10
1.4	Brzina tačke	12
1.4.1	Brzina u Dekartovim koordinatama	12
1.4.2	Brzina u cilindričnim koordinatama	13
1.4.3	Brzina u prirodnim koordinatama	14
1.4.4	Brzina u sfernim koordinatama	15
1.4.5	Sektorska brzina tačke	15

1.5	Ubrzanje tačke	16
1.5.1	Ubrzanje u Dekartovim koordinatama	16
1.5.2	Ubrzanje u cilindričnim koordinatama	17
1.5.3	Ubrzanje u prirodnim koordinatama	18
1.5.4	Ubrzanje u sfernim koordinatama	21
1.6	Kinematički dijagrami	22
1.6.1	Dijagram pređeni put – vreme	22
1.6.2	Dijagram brzina – vreme	23
1.6.3	Dijagram ubrzanje (tangentno)– vreme	24
1.6.4	Određivanje $v-t$ dijagrama na osnovu $a-t$ dijagrama	25
1.6.5	Određivanje $s-t$ dijagrama na osnovu $v-t$ dijagrama	26
1.6.6	Određivanje $v-s$ dijagrama na osnovu $a-s$ dijagrama	26
1.6.7	Određivanje $a-s$ dijagrama na osnovu $v-s$ dijagrama	27
2	Kinematika krutog tela	29
2.1	Definicija pojma kruto telo	29
2.2	Položaj krutog tela	29
2.3	Translatorno kretanje krutog tela	31
2.3.1	Položaj	32
2.3.2	Brzina	32
2.3.3	Ubrzanje	32
2.4	Obrtanje krutog tela oko nepokretne ose	33
2.4.1	Brzina i ubrzanje tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose	36
2.5	Ravansko kretanje krutog tela	37
2.5.1	Brzina tačke tela pri ravanskom kretanju	38
2.5.2	Ubrzanje tačke tela pri ravanskom kretanju	42
2.6	Obrtanje krutog tela oko nepokretne tačke	44
2.6.1	Ojlerovi uglovi	44
3	Složeno kretanje tačke	51

II

Dinamika

4	Uvod	57
4.1	Njutnovi zakoni	58

5	Statika	61
5.1	Uvod	61
5.2	Osnovni pojmovi i definicije Statike	61
5.2.1	Sila	61
5.2.2	Veze, vrste veza i njihove reakcije	63
5.2.3	Princip oslobađanja od veza	63
5.2.4	Moment sile u odnosu na tačku	66
5.2.5	Moment sile u odnosu na osu	67
5.2.6	Spreg sila	68
5.2.7	Redukcija sile na tačku. Torzer	69
5.3	Uslovi ravnoteže	71
5.3.1	Uslovi ravnoteže u vektorskom obliku	71
5.3.2	Uslovi ravnoteže u skalarnom obliku	71
6	Dinamika materijalne tačke	73
6.1	Njutnovi zakoni dinamike	73
6.1.1	Princip određenosti	75
6.2	Osnovni zadaci dinamike	75
6.3	Diferencijalne jednačine kretanja tačke	76
6.4	Oscilatorno kretanje	80
6.4.1	Uvod	80
6.4.2	Slobodne oscilacije	81
6.4.3	Prinudne oscilacije	87
6.5	Neslobodno (prinudno) kretanje tačke	91
6.5.1	Diferencijalne jednačine neslobodnog kretanja, u Dekartovim koordinatama	92
6.5.2	Diferencijalne jednačine neslobodnog kretanja, u prirodnim koordinatama	92
6.5.3	Dalamberov princip	92
6.6	Mere mehaničkog kretanja	93
6.6.1	Količina kretanja	93
6.6.2	Moment količine kretanja	94
6.6.3	Kinetička energija	94
6.7	Mere mehaničkog dejstva	95
6.7.1	Impuls sile	95
6.7.2	Rad sile	96
6.7.3	Polje sile, potencijalna energija, uslovi konzervativnosti	98
6.7.4	Primeri izračunavanja rada	101

6.7.5	Snaga sile	104
6.8	Opšti zakoni dinamike materijalne tačke	104
6.8.1	Zakon promene količine kretanja	104
6.8.2	Zakon promene momenta količine kretanja	105
6.8.3	Zakoni promene kinetičke energije i održanja ukupne mehaničke energije	106
6.9	Relativno kretanje materijalne tačke	108
6.9.1	Fukoovo klatno	110
7	Geometrija masa	115
7.1	Uvod	115
7.2	Gustina	116
7.3	Centar mase sistema materijalnih tačaka	117
7.3.1	Centar mase u odnosu na Dekartov koordinatni sistem	119
7.4	Momenti inercije materijalnog sistema	120
7.4.1	Momenti inercije u odnosu na ose Dekartovog sistema	121
7.4.2	Svojstva momenata inercije	123
7.4.3	Moment inercije za dve paralelne ose. Hajgens-Štajnerova teorema 124	
7.4.4	Poluprečnik inercije	126
7.5	Izračunavanje momenata inercije za neka tela	126
8	Dinamika sistema tačaka	129
8.1	Podela sila	131
8.1.1	Svojstva unutrašnjih sila	131
8.2	Mere kretanja sistema materijalnih tačaka	133
8.2.1	Količina kretanja sistema	133
8.2.2	Moment količine kretanja sistema	134
8.2.3	Moment količine kretanja za osu	134
8.2.4	Kinetička energija sistema	135
8.3	Opšti zakoni dinamike sistema tačaka	136
8.3.1	Zakon kretanja centra mase	136
8.3.2	Zakon promene količine kretanja sistema	136
8.3.3	Zakon promene momenta količine kretanja sistema	138
8.3.4	Zakoni promene kinetičke energije i održanja mehaničke energije	
	139	

9	Dinamika krutog tela	143
9.1	Osnovni pojmovi	144
9.1.1	Količina kretanja	144
9.1.2	Moment količine kretanja	145
9.1.3	Kinetička energija krutog tela	148
9.1.4	Elementarni rad sila na krutom telu	150
9.2	Slobodno kruto telo	151
9.2.1	Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela	152
9.3	Specijalni slučajevi	153
9.3.1	Translatorno kretanje krutog tela	153
9.3.2	Obrtanje krutog tela oko nepomične ose	153
9.3.3	Ravansko kretanje krutog tela	157
9.3.4	Obrtanje krutog tela oko nepokretne tačke	158
10	Elementi analitičke mehanike	163
10.1	Veze i njihova klasifikacija	164
10.1.1	Geometrijske veze	165
10.2	Stvarna, moguća i virtualna pomeranja	167
10.3	Virtualni rad. Idealne veze	170
10.4	Opšta jednačina dinamike	171
10.5	Lagranževe jednačine prve vrste	171
10.6	Princip virtualnog pomeranja. D'alamberov princip	173
10.7	Lagranževe jednačine druge vrste	174
11	Teorija sudara	179
11.1	Uvod	179
11.2	Osnovne pretpostavke teorije sudara	180
11.3	Osnovni pojmovi	181
11.3.1	Pravac sudara	181
11.3.2	Koeficijent restitucije	182
11.3.3	Apsolutno neelastičan sudar	182
11.3.4	Apsolutno elastičan sudar	183
11.4	Eksperimentalno određivanje koeficijenta restitucije	183
11.5	Kos udar o nepokretnu glatku pregradu	184
11.6	Upravni udar o nepokretnu glatku pregradu	185

11.7	Zakon održanja količine kretanja materijalnog sistema pri sudaru	187
11.8	Kos centralni sudar	188
11.9	Upravni centralni sudar dva tela	189
11.10	Gubitak kinetičke energije pri udaru	190



Literatura	195
Srpsko-engleski rečnik	199
Registar pojmova - pojmovnik	205

Predgovor

Predgovor I izdanju

U ovoj knjizi izložena je teorija koja pokriva oblasti Kinematike i Dinamike. Takođe su izloženi, kao specijalan slučaj Dinamike, osnovni pojmovi Statike i to u obimu dovoljnom da bi se u nastavku pratilo izlaganje iz Dinamike.

Knjiga je podeljena u 10 poglavlja: Kinematika tačke, Kinematika krutog tela, Složeno kretanje tačke, Statika, Dinamika materijalne tačke, Geometrija masa, Dinamika sistema materijalnih tačaka, Dinamika krutog tela, Elementi analitičke mehanike i Teorija sudara.

Namenjena je studentima I godine Saobraćajnog fakulteta Univerziteta u Beogradu i pokriva program kursa Mehanika 1.

Autori izražavaju zahvalnost recenzentima dr Predragu Cvetkoviću, redovnom profesoru Saobraćajnog fakulteta i dr Srđanu Rusovu, vanrednom profesoru Saobraćajnog fakulteta. Njihova pomoć pri izradi ovog udžbenika prevazilazi uobičajenu pomoć recenzenta.

Posebnu zahvalnost dugujemo dr Aleksandru Bakši, redovnom profesoru Matematičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu, koji je rukopis pažljivo pročitao i dao niz dragocenih sugestija za poboljšanje kvaliteta ove knjige.

Gospođa Jovanka Cvetković pomogla je svojim sugestijama da i ove mate-

matičke formule lepše izgledaju, na čemu smo joj zahvalni.

Takođe veliku zahvalnost dugujemo i Gordani Marjanović, koja je pomogla oko tehničke pripreme ove knjige.

Svesni da do grešaka i propusta uvek dolazi, naravno nenamerno, bićemo zahvalni svakome koji nam na njih ukaže.

U Beogradu, decembra 2010. god.

Autori

Predgovor II izdanju

U ovom izdanju ispravljene su uočene greške, izvršene su manje izmene na pojedinim crtežima i ubačen je englesko-srpski rečnik stručnih pojmova.

I ovom prilikom zahvaljujemo se dr Predragu Cvetkoviću, redovnom profesoru Saobraćajnog fakulteta, dipl. inž. mašinstva Dragiši Vidanoviću i gospođi Jovanki Cvetković, koji su ponovo pažljivo pročitali rukopis i pomogli da se uočeni nedostaci uklone. Autori se takođe zahvaljuju i onim studentima koji su ukazali na uočene greške.

U Beogradu, decembra 2015. god.

Autori

Predgovor III izdanju

Ni ovo izdanje nije pretrpilo veće izmene. Ispravljene su uočene greške, izvršene su manje izmene na pojedinim crtežima.

I ovom prilikom zahvaljujemo se dr Predragu Cvetkoviću, redovnom profesoru Saobraćajnog fakulteta, dipl. inž. mašinstva Dragiši Vidanoviću i gospođi Jovanki Cvetković, koji su ponovo pažljivo pročitali rukopis i pomogli da se uočeni nedostaci uklone. Autori se takođe zahvaljuju i onim studentima koji su ukazali na uočene greške.

U Beogradu, januara 2020. god.

Autori