

UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

Dr Maja M. PETROVIĆ
Dr Radovan B. ŠTULIĆ

NACRTNA GEOMETRIJA
– GEOMETRIJA VIZUELIZACIJE
3D PROSTORA:
ZBIRKA ZADATAKA

– II izdanje –

BEOGRAD
2022.

Recenzent: dr Radomir Mijailović
Za izdavača: dr Nebojša Bojović, dekan
Glavni i odgovorni urednik: dr Marijana Petrović
Tehnički urednik: Gordana Marjanović
Korice: Predrag S. Zdravković
Izdavač: Univerzitet u Beogradu – Saobraćajni fakultet,
Vojvode Stepe 305,
telefon: 3976–017; fax: 3096–704;
<http://www.sf.bg.ac.rs>
Priprema: dr Maja M. Petrović
Štampa: Pekograf d.o.o.
11080 Zemun, Vojni put 258/d
telefon/fax: 3149–166
e-mail: pekograf@sbb.rs
<http://www.pekograf.com>
Tiraž: 250 primeraka

ISBN 978–86–7395–435–6

Na osnovu odluke Uređivačkog odbora Saobraćajnog fakulteta Univerziteta u Beogradu broj 359/2 od 28. februara 2022. godine, odobrava se za upotrebu u nastavi kao pomoćni udžbenik za predmet "Nacrtna geometrija".

CIP – КАТАЛОГИЗАЦИЈА У ПУБЛИКАЦИЈИ
Народна библиотека Србије, Београд

742(075.8)(076)

ПЕТРОВИЋ, Маја М., 1973-

Nacrtna geometrija : geometrija vizuelizacije 3D prostora : zbirka zadataka / Maja M. Petrović, Radovan B. Štulić. - 2. izd. - Beograd : Univerzitet, Saobraćajni fakultet, 2022 (Zemun : Pekograf). - IX, 130 str. : ilustr. ; 30 cm

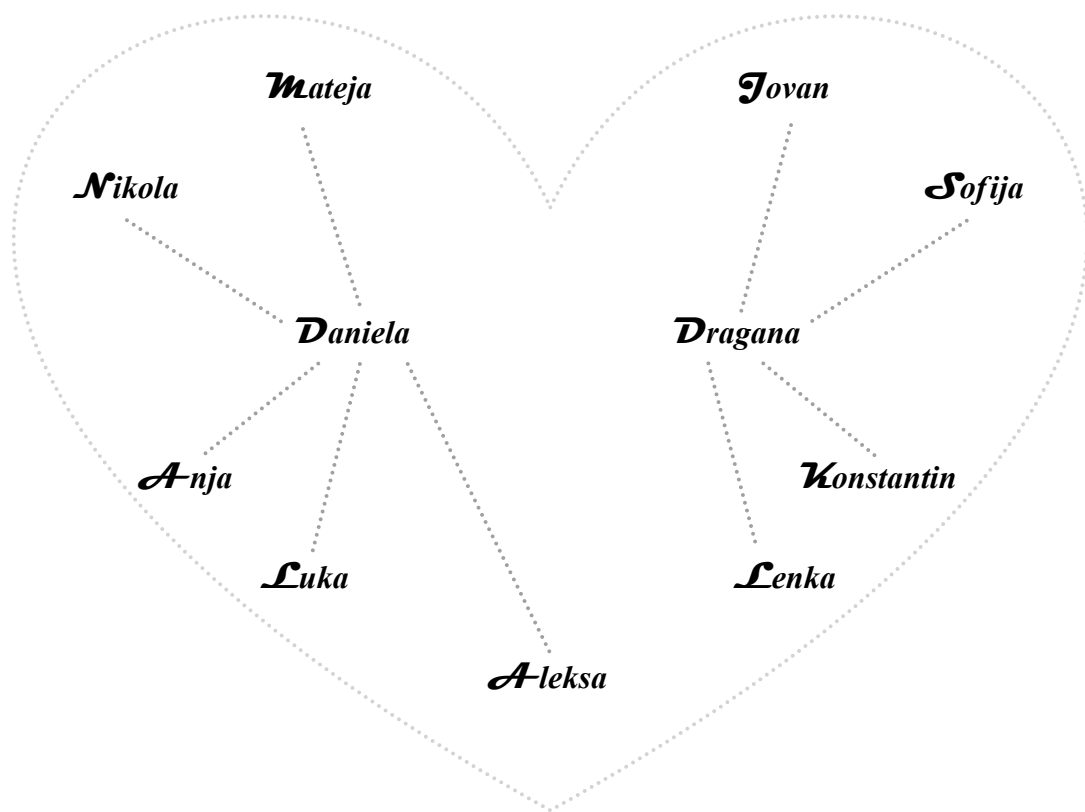
Tiraž 250. - Srpsko-engleski rečnik pojmova : (rečnik - glossary): str. 123-126. - Beleška o autorima: str. 129-130. - Bibliografija: str. 127.

ISBN 978-86-7395-435-6

1. Штулић, Радован, 1965- [аутор]

a) Перспектива - Задаци

COBISS.SR-ID 62486537



SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
SPISAK SLIKA I TABELA	III
SPISAK SKRAĆENICA	VII
PREDGOVOR	IX
I OSNOVNI ELEMENTI PROSTORA I PROSTORNE VIZUELIZACIJE	1
1. OSNOVNI POJMOVI.....	3
1.1. Projekcija, pogled, senka	3
1.2. Prostorna vizuelizacija.....	3
1.3. Prostorna orijentacija, referentni koordinatni sistem i osnovni pogledi	3
2. TAČKA	5
2.1. Tačka u opštem položaju.....	5
2.2. Tačka u specijalnom položaju	8
3. PRAVA.....	17
3.1. Prava u opštem položaju	17
3.2. Prava u specijalnom položaju.....	25
4. RAVAN.....	35
4.1. Ravan u opštem položaju	35
4.2. Ravan u specijalnom položaju.....	41
4.3. Tačka i prava u ravni.....	42
4.4. Prostorni odnosi prave i ravni	53
II METRIČKI PROBLEMI. SPECIJALNI POGLEDI. ROTACIJA	67
5. METRIČKI PROBLEMI. SPECIJALNI POGLEDI.....	69
5.1. Suština postupka uvođenja novih pravaca sagledavanja nekog objekta	69
5.2. Prava veličina duži i uglova	71
5.3. Rastojanje tačke do prave.....	73
5.4. Rastojanje paralelnih pravih. Rastojanje mimolaznih pravih.....	74
5.5. Svrha i načini uvođenja specijalnih pogleda	75
5.6. Primeri primene uvođenja specijalnih pogleda	83

6. ROTACIJA	85
6.1. Princip rotacije. Rotiranje tačke	85
6.2. Rotiranje prave	86
6.3. Rotiranje ravni	88
III PRAVILNI POLIEDRI	95
7. PLATONOVA TELA.....	97
7.1. Geometrijska svojstva pravilnih poliedara	97
8. KOCKA	101
9. OKTAEDAR	109
10. TETRAEDAR	115
SRPSKO-ENGLNESKI REČNIK POJMOVA	123
LITERATURA	127
BELEŠKA O AUTORIMA	129

SPISAK SLIKA I TABELA

I OSNOVNI ELEMENTI PROSTORA I PROSTORNE VIZUELIZACIJE	1
<i>Slika I - 1: Osnovni pogledi.....</i>	<i>4</i>
<i>Slika I - 2: Dekartov pravougli koordinatni sistem</i>	<i>5</i>
<i>Slika I - 3: Tri ortogonalne projekcije na H, F i P i aksonometrijski prikaz aviona i automobila</i>	<i>6</i>
<i>Slika I - 4: Određenost položaja tačke A i B u odnosu na ravni H, F i P.....</i>	<i>7</i>
<i>Slika I - 5: Postavka 1. zadatka</i>	<i>9</i>
<i>Slika I - 6: Rešenje 1. zadatka</i>	<i>10</i>
<i>Slika I - 7: Postavka 2. zadatka</i>	<i>11</i>
<i>Slika I - 8: Rešenje 2. zadatka</i>	<i>12</i>
<i>Slika I - 9: Postavka 3. zadatka</i>	<i>13</i>
<i>Slika I - 10: Rešenje 3. zadatka</i>	<i>14</i>
<i>Slika I - 11: Postavka 4. zadatka</i>	<i>15</i>
<i>Slika I - 12: Rešenje 4. zadatka</i>	<i>16</i>
<i>Slika I - 13: Prava $a(AB)$ i njeni prodori kroz koordinatne ravni</i>	<i>17</i>
<i>Slika I - 14: Analiza položaja duži $d(AB)$ u odnosu na koordinatne ravni u ortogonalnim projekcijama</i>	<i>18</i>
<i>Slika I - 15: Određivanje prodora prave $a(AB)$ i vidljivosti prave u ortogonalnim projekcijama</i>	<i>19</i>
<i>Slika I - 16: Postavka 5. zadatka</i>	<i>20</i>
<i>Slika I - 17: Postavka za analizu položaja duži $d(AB)$.....</i>	<i>21</i>
<i>Slika I - 18: Rešenje 5. zadatka</i>	<i>22</i>
<i>Slika I - 19: Rešenje za analizu položaja duži $d(AB)$.....</i>	<i>23</i>
<i>Slika I - 20: Postavka 6. zadatka</i>	<i>23</i>
<i>Slika I - 21: Rešenje 6. zadatka</i>	<i>24</i>
<i>Slika I - 22: Postavka 7. zadatka</i>	<i>24</i>
<i>Slika I - 23: Rešenje 7. zadatka</i>	<i>25</i>
<i>Slika I - 24: Postavka 8. zadatka</i>	<i>26</i>
<i>Slika I - 25: Rešenje 8. zadatka</i>	<i>27</i>
<i>Slika I - 26: Postavka 9. zadatka</i>	<i>27</i>
<i>Slika I - 27: Rešenje 9. zadatka</i>	<i>28</i>
<i>Slika I - 28: Postavka 10. zadatka</i>	<i>29</i>
<i>Slika I - 29: Rešenje 10. zadatka</i>	<i>30</i>
<i>Slika I - 30: Postavka 11. zadatka</i>	<i>30</i>
<i>Slika I - 31: Rešenje 11. zadatka</i>	<i>31</i>
<i>Slika I - 32: Postavka 12. zadatka</i>	<i>32</i>

<i>Slika I - 33: Rešenje 12. zadatka</i>	32
<i>Slika I - 34: Postavka 13. zadatka</i>	33
<i>Slika I - 35: Rešenje 13. zadatka</i>	34
<i>Slika I - 36: Načini zadavanja ravni</i>	35
<i>Slika I - 37: Ravan zadata trouglom ABC</i>	36
<i>Slika I - 38: Postavka 14. zadatka</i>	37
<i>Slika I - 39: Rešenje 14. zadatka</i>	38
<i>Slika I - 40: Ravan sa konvergentnim tragovima</i>	39
<i>Slika I - 41: Ravan sa divergentnim tragovima</i>	40
<i>Slika I - 42: Ravan u specijalnom položaju (kosa projekcija)</i>	41
<i>Slika I - 43: Tačka i prava u ravni</i>	42
<i>Slika I - 44: Dve ravni kroz pravu (presek dve ravni)</i>	43
<i>Slika I - 45: Postavka 15. zadatka</i>	44
<i>Slika I - 46: Rešenje 15. zadatka</i>	45
<i>Slika I - 47: Postavka 16. zadatka</i>	45
<i>Slika I - 48: Rešenje 16. zadatka</i>	46
<i>Slika I - 49: Postavka 17. zadatka</i>	46
<i>Slika I - 50: Rešenje 17. zadatka</i>	47
<i>Slika I - 51: Postavka 18. zadatka</i>	47
<i>Slika I - 52: Rešenje 18. zadatka</i>	48
<i>Slika I - 53: Postavka 19. zadatka</i>	48
<i>Slika I - 54: Rešenje 19. zadatka</i>	49
<i>Slika I - 55: Postavka 20. zadatka</i>	50
<i>Slika I - 56: Rešenje 20. zadatka</i>	51
<i>Slika I - 57: Postavka 21. zadatka</i>	51
<i>Slika I - 58: Rešenje 21. zadatka</i>	52
<i>Slika I - 59: Postavka 22. zadatka</i>	52
<i>Slika I - 60: Rešenje 22. zadatka</i>	53
<i>Slika I - 61: Prava upravna na ravan (normala ravni α, β i γ)</i>	53
<i>Slika I - 62: Određivanje tragova ravni ako je zadata normala</i>	54
<i>Slika I - 63: Određivanje vidljivosti dve mimoilazne prave</i>	55
<i>Slika I - 64: Primer primene mimoilaznih pravih</i>	55
<i>Slika I - 65: Invarijantnost dve prave</i>	56
<i>Slika I - 66: Ravan sa konvergentnim tragovima zadata vektorom položaja ON</i>	57
<i>Slika I - 67: Ravan sa divergentnim tragovima zadata vektorom položaja ON</i>	58
<i>Slika I - 68: Prvi nagibni triedar ravni</i>	59
<i>Slika I - 69: Drugi nagibni triedar ravni</i>	60
<i>Slika I - 70: Postavka i rešenje 26. zadatka</i>	61
<i>Slika I - 71: Postavka i rešenje 27. zadatka</i>	62
<i>Slika I - 72: Postavka i rešenje 28. zadatka</i>	63
<i>Slika I - 73: Postavka i rešenje 29. zadatka</i>	64

<i>Slika I - 74: Postavka i rešenje 30. zadatka</i>	65
<i>Slika I - 75: Postavka i rešenje 31. zadatka</i>	66
<i>Tabela I - 1: Tabelarni prikaz opisa oznaka položaja tačke u odnosu na ravni H, F i P</i>	6
II METRIČKI PROBLEMI. SPECIJALNI POGLEDI. ROTACIJA	67
<i>Slika II - 1: Specijalni pogled IV (ravan 4 upravna na horizontalnicu)</i>	70
<i>Slika II - 2: Specijalni pogled V (ravan 5 upravna na frontalnicu)</i>	70
<i>Slika II - 3: Postavka 32. zadatka</i>	71
<i>Slika II - 4: Rešenje 32. zadatka</i>	72
<i>Slika II - 5: Postavka 33. zadatka</i>	72
<i>Slika II - 6: Rešenje 33. zadatka</i>	73
<i>Slika II - 7: Rastojanje tačke M do prave a</i>	73
<i>Slika II - 8: Postavka i rešenje 34. zadatka</i>	74
<i>Slika II - 9: Određivanje dužine i mesta najkraćeg rastojanja dveju mimoilaznih pravih</i>	74
<i>Slika II - 10: Postavka i rešenje 35. zadatka</i>	75
<i>Slika II - 11: Postavka i rešenje 36. zadatka</i>	76
<i>Slika II - 12: Postavka i rešenje 37. zadatka</i>	77
<i>Slika II - 13: Postavka i rešenje 38. zadatka</i>	78
<i>Slika II - 14: Postavka i rešenje 39. zadatka</i>	79
<i>Slika II - 15: Postavka i rešenje 40. zadatka</i>	80
<i>Slika II - 16: Postavka i rešenje 41. zadatka</i>	81
<i>Slika II - 17: Postavka i rešenje 42. zadatka</i>	82
<i>Slika II - 18: Par Monžovih projekcija za 3D površ</i>	83
<i>Slika II - 19: Cilindrična površ</i>	83
<i>Slika II - 20: Konoidna površ</i>	84
<i>Slika II - 21: Dvo-direktrisna površ</i>	84
<i>Slika II - 22: Rotiranje tačke M oko ose O koja je: z-pravca (levo) i y-pravca (desno) za zadati ugao φ</i>	85
<i>Slika II - 23: Rotiranje prave a oko ose O koja je z-pravca (levo) i y-pravca (desno)</i>	86
<i>Slika II - 24: Rešenje 43. zadatka</i>	87
<i>Slika II - 25: Rešenje 44. zadatka</i>	87
<i>Slika II - 26: Rotiranje ravni α oko njenog prvog traga (levo) i oko njenog drugog traga (desno)</i>	88
<i>Slika II - 27: Postavka i rešenje 45. zadatka</i>	89
<i>Slika II - 28: Postavka i rešenje 46. zadatka</i>	90
<i>Slika II - 29: Postavka i rešenje 47. zadatka</i>	91
<i>Slika II - 30: Postavka i rešenje 48. zadatka</i>	92
<i>Slika II - 31: Postavka i rešenje 49. zadatka</i>	93
<i>Slika II - 32: Postavka i rešenje 50. zadatka</i>	94

III PRAVILNI POLIEDRI	95
<i>Slika III - 1: Pet Platonovih geometrijskih tela.....</i>	<i>97</i>
<i>Slika III - 2: Mreža pravilnog poliedra:.....</i>	<i>100</i>
<i>Slika III - 3: Kocka.....</i>	<i>101</i>
<i>Slika III - 4: Povezanost strane kocke a_k i dijagonale strane kocke d_k (geometrijska konstrukcija $\sqrt{2}$).....</i>	<i>101</i>
<i>Slika III - 5: Izdvojeni prikaz (1. do 4.) pri konstruisanju kocke u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>102</i>
<i>Slika III - 6: Izdvojeni prikaz (5. do 8.) pri konstruisanju kocke u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>103</i>
<i>Slika III - 7: Izdvojeni prikaz (9. i 10.) pri konstruisanju kocke u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>104</i>
<i>Slika III - 8: Postavka i rešenje 51. zadatka.....</i>	<i>105</i>
<i>Slika III - 9: Postavka i rešenje 52. zadatka.....</i>	<i>106</i>
<i>Slika III - 10: Postavka i rešenje 53. zadatka.....</i>	<i>107</i>
<i>Slika III - 11: Postavka i rešenje 54. zadatka.....</i>	<i>108</i>
<i>Slika III - 12: Geometrijska struktura oktaedra koji je upisan u kocku.....</i>	<i>109</i>
<i>Slika III - 13: Izdvojeni prikaz (1. do 4.) pri konstruisanju oktaedra u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>110</i>
<i>Slika III - 14: Izdvojeni prikaz (5. do 8.) pri konstruisanju oktaedra u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>111</i>
<i>Slika III - 15: Izdvojeni prikaz (9. do 12.) pri konstruisanju oktaedra u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>112</i>
<i>Slika III - 16: Postavka i rešenje 55. zadatka.....</i>	<i>113</i>
<i>Slika III - 17: Postavka i rešenje 56. zadatka.....</i>	<i>114</i>
<i>Slika III - 18: Geometrijska struktura tetraedra koji je upisan u kocku.....</i>	<i>115</i>
<i>Slika III - 19: Izdvojeni prikaz (1. do 4.) pri konstruisanju tetraedra u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>116</i>
<i>Slika III - 20: Izdvojeni prikaz (5. do 8.) pri konstruisanju tetraedra u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>117</i>
<i>Slika III - 21: Izdvojeni prikaz (9. do 12.) pri konstruisanju tetraedra u ortogonalnim projekcijama.....</i>	<i>118</i>
<i>Slika III - 22: Postavka i rešenje 57. zadatka.....</i>	<i>119</i>
<i>Slika III - 23: Postavka i rešenje 58. zadatka.....</i>	<i>120</i>
<i>Slika III - 24: Postavka i rešenje 59. zadatka.....</i>	<i>121</i>
 <i>Tabela III - 1: Tabelarni prikaz broja ivica, strana, temena i red grupe simetrija i rotacija pravilnih poliedara.....</i>	 <i>98</i>

SPISAK SKRAĆENICA

Objekat	Notacija	Primeri
Tačka	Veliko slovo latinice	$A, B, C, \dots P, Q, \dots$
Prava	Malo slovo latinice	$a, b, c, \dots p, q, \dots$
Ravan	Slova grčkog alfabeta	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots$
Projekcijska ravan (PR)	Veliko slovo latinice (ili broj)	H (1) za horizontalnicu; F (2) za frontalnicu; P (3) za profilnicu; 4, 5, ... za novu ravan
Nagibni triedar (NT)	Ortogonalni trokrak ravni (u tački A): prvi, drugi i treći NT	I NT: $h_A - g_{1A} - n_A$; II NT: $f_A - g_{2A} - n_A$; III NT: $p_A - g_{3A} - n_A$
Trougao ABC	Ravna figura – trougao sa temenima A, B i C	$\triangle ABC$

Relacija	Notacija	Primeri
Orijentacija objekta u odnosu na projekcijske ravni H, F i P	Tačka M je iznad horizontalnice; Tačka M je ispod horizontalnice	$M \uparrow$ $M \downarrow$
	Tačka M je ispred frontalnice; Tačka M je iza frontalnice	$M \swarrow$ $M \nearrow$
	Tačka M je desno od profilnice; Tačka M je levo od profilnice	$M \rightarrow$ $M \leftarrow$
Poklapanje dve projekcije	Tačka M poklapa se sa svojom projekcijom tj. pogledom odozgo, спреда ili zdesna	$M \equiv M'$; $M \equiv M''$; $M \equiv M'''$
Pripadnost (incidencija)	Tačka M pripada pravoj a ; Tačka A pripada ravni α ; Prava b pripada ravni β	$M \in a$; $A \in \alpha$; $b \in \beta$

PREDGOVOR

Sadržaj ove zbirke zadataka čini deo gradiva koje izučavaju studenti Saobraćajnog fakulteta Univerziteta u Beogradu kroz predmet Nacrtna geometrija koji se predaje na drugoj godini studija sa fondom časova 2+2. Ovaj pomoćni udžbenik preporučuje se studentima Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu koji u okviru studijskih programa izučavaju *nacrtnu geometriju*, studentima Dizajna enterijera na Akademiji umetnosti u Novom Sadu, kao i svim ostalim studentima tehničke struke.

Poznavanje *nacrtna geometrije* je osnovni preduslov za uspešno ovladavanje sposobnošću prostorne vizuelizacije. Izložena materija ovog pomoćnog udžbenika upućuje u osnove vizuelizacije trodimenzionalnog (3D) prostora. Razvijanje sposobnosti prostorne vizuelizacije, prostorne imaginacije i sposobnosti rešavanja problema različitih uzajamnih prostornih odnosa odabranih geometrijskih formi na dvodimenzionom (2D) prikazu paralelnog projiciranja predstavlja cilj izučavanja ove materije. Težište izlaganja je stavljeno na dobro savladavanje osnovnih geometrijskih elemenata (tačaka, pravih i ravni), njihovih međusobnih odnosa i načina za određivanje pravih veličina duži i uglova. Razne složene prostorne forme jednostavno se analiziraju na osnovu karakterističnih elemenata njihovih geometrijskih struktura.

Zbirka zadataka je koncipirana tako da sadrži tri poglavlja. Prvo poglavlje sadrži tipove zadataka koji su u vezi sa paralelnim projiciranjem, odnosno postavljanje pravaca posmatranja i prikazivanjem vrste slika osnovnih geometrijskih formi (tačka, prava i ravan). Drugo poglavlje sadrži tipove zadataka vezanih za kriterijume za dobijanje karakterističnih pogleda i položaja objekta (metrički problemi, specijalni pogledi i rotacija) u cilju neposredne detekcije metričkih svojstava i prepoznavanja prostornih odnosa objekata. Tu uvodimo i koncept vidljivosti. Zadaci trećeg poglavlja vezani su za primenu prethodno izučene materije na složenije geometrijske forme (pravilni poliedri). Zadaci za vežbu su tako postavljeni da predstavljaju karakterističan tip, ali sa malom promenom nekih elemenata studenti mogu dobiti čitav niz novih zadataka.

Na kraju, autori se zahvaljuju svima koji su svojim podstrekom i dragocenim savetima pomogli da ova zbirka zadataka uđe u završnu fazu. Autori se takođe zahvaljuju kolegini Varvari Medvedev koja je svojim znanjem, sugestijama i višegodišnjom saradnjom sa autorima doprinela da se unaprede zadaci i njihove postavke iz predmeta Nacrtna geometrija na Saobraćajnom fakultetu. Unapred se zahvaljujemo za svaki budući komentar i sugestiju koji bi mogli da doprinesu poboljšanju ovog pomoćnog udžbenika.

III *i* *R*
10 *Š*

