

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
САОБРАЋАЈНИ ФАКУЛТЕТ

Др Светозар ВУКАДИНОВИЋ
Др Јован ПОПОВИЋ

ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА

БЕОГРАД
2019.

Др Светозар Вукадиновић, др Јован Поповић
ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА
I издање

Рецензенти:	академик др Душан Теодоровић др Слободан Милорадовић
За издавача:	декан, др Небојша Бојовић
Главни и одговорни уредник:	др Маријана Петровић
Технички уредник:	Гордана Марјановић
Корице:	Предраг С. Здравковић
Издавач:	Универзитет у Београду – Саобраћајни факултет, Војводе Степе 305; телефон: 3976–017; фах: 3096–704; http://www.sf.bg.ac.rs
Припрема:	Издавачка делатност Саобраћајног факултета телефон: 3091–344; e-mail: izdavacka_delatnost@sf.bg.ac.rs
Штампа:	Пекограф д.о.о., 11080 Земун, Војни пут 258/д телефон/фах: 3149–166; e-mail: pekograf@sbb.rs http://www.pekograf.com
Тираж:	400 примерака

ISBN 978–86–7395–412–7

Напомена: Због потребе усаглашавања са акредитованим програмом, промењен је наслов уџбеника. У свим осталим деловима ово издање се ни у једном делу, осим поткоричне стране, импресума и СІР каталогизације не разликује од III издања публикованог 2008. године под насловим "Математичка статистика" под ISBN ознаком 978-86-7395-165-2.

На основу одлуке Уређивачког одбора Саобраћајног факултета Универзитета у Београду број 1299/2 од 24. децембра 2019. године, одобрава се за употребу у настави као основни уџбеник за предмет "Вероватноћа и статистика" на основним студијама.

Издавач задржава сва права. Репродукција појединих делова или целине ове публикације није дозвољена

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР	1
УВОД	3
1. Предмет теорије вероватноће	3
2. Преглед историјског развоја теорије вероватноће	5

И део

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋЕ

Глава 1

ВЕРОВАТНОБА СЛУЧАЈНОГ ДОГАЂАЈА	13
1.1. Случајни догађаји, алгебра догађаја	13
1.1.1. Догађај и скуп	13
1.1.2. Простор елементарних догађаја. Алгебра догађаја	15
Задачи	20
1.2. Вероватноћа случајног догађаја	23
1.2.1. Класична дефиниција вероватноће	23
Задачи	27
1.2.2. Геометријска дефиниција вероватноће	29
Задачи	33
1.2.3. Статистичка дефиниција вероватноће	34
1.2.4. Аксиоматска дефиниција вероватноће	35
1.3. Основне формуле теорије вероватноће	37
1.3.1. Условна вероватноћа. Вероватноћа производа и збира догађаја. Независност догађаја	37
Задачи	46

1.3.2. Формула тоталне вероватноће. Бајесова теорема.....	52
Задачи	55

Глава 2

СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ	61
2.1. Једнодимензионална случајна променљива.....	61
2.1.1. Закон расподеле вероватноћа и функција расподеле (кумулативни закон) дискретне једнодимензионалне случајне променљиве	62
Задачи	66
2.1.2. Функција расподеле и густина расподеле вероватноћа непрекидне једнодимензионалне случајне променљиве	69
Задачи	77
2.2. Дводимензионална случајна променљива	81
2.2.1. Општи појам вишедимензионалне случајне променљиве	81
2.2.2. Расподела вероватноћа дискретне дводимензионалне случајне променљиве. Функција расподеле.....	81
Задачи	85
2.2.3. Непрекидна дводимензионална случајна променљива (X, Y) . Функција расподеле и густина расподеле вероватноћа	87
Задачи	90
2.2.4. Маргиналне и условне расподеле вероватноћа. Зависне и независне случајне променљиве	91
Задачи	97

Глава 3

ФУНКЦИЈЕ СЛУЧАЈНИХ ПРОМЕНЉИВИХ	101
Задачи	112

Глава 4

ПАРАМЕТРИ ИЛИ БРОЈНЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ СЛУЧАЈНИХ ПРОМЕНЉИВИХ	117
4.1. Параметри који репрезентују центар растурања једнодимензионалне случајне променљиве: математичко очекивање, медијана и мода	117
Задачи	132
4.2. Параметри који мере растурање вредности једнодимензионалне случајне променљиве око центра растурања: средње апсолутно одступање, дисперзија и стандардно одступање.....	137
Задачи	148
4.3. Коефицијенти асиметрије и ексцеса расподела вероватноћа једнодимензионалне случајне променљиве	154
Задачи	157

4.4.	Параметри расподеле димензионалне случајне променљиве (X, Y) .	
	Коефицијент корелације.....	159
	Задачи.....	167
4.5.	Функција изводница и карактеристична функција.....	168
	4.5.1. Функција изводница.....	168
	4.5.2. Карактеристична функција.....	177
	Задачи.....	185

Глава 5

ОСНОВНЕ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ.....	187
5.1. Биномна расподела.....	187
Задачи.....	194
5.2. Хипергеометријска расподела.....	196
Задачи.....	201
5.3. Геометријска и негативна биномна расподела.....	202
Задачи.....	205
5.4. Поасонова расподела.....	206
Задачи.....	215

Глава 6

ОСНОВНЕ РАСПОДЕЛЕ НЕПРЕКИДНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ.....	217
6.1. Равномерна расподела.....	217
6.2. Експоненцијална расподела.....	218
Задачи.....	220
6.3. Нормална расподела.....	222
Задачи.....	230
6.4. Логаритамско нормална расподела.....	233
6.5. Гама и бета расподеле. Хи-квадрат расподела.....	235
Задачи.....	241
6.6. Студентова расподела.....	242
Задачи.....	246
6.7. Фишерава расподела. Снедекорова F-расподела.....	247
Задачи.....	248
6.8. Димензионална нормална расподела.....	248
Задачи.....	252

Глава 7

ГРАНИЧНЕ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИЈЕ ВЕРОВАТНОЋЕ.....	253
7.1. Појам закона великих бројева и централне граничне теореме.....	253
7.2. Различити облици закона великих бројева.....	255

	Задаци.....	263
7.3.	Локална и интегрална теорема Муавр–Лапласа.....	264
	Задаци.....	269
7.4.	Централна гранична теорема.....	271
	Задаци.....	276

Глава 8

	СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ.....	279
8.1.	Интуитивно увођене случајне функције.....	279
8.2.	Појам случајне функције као уопштење појма система случајних величина. Закон расподеле случајне функције.....	281
8.3.	Математичко очекивање и дисперзија случајне функције $X(t)$. Корелациона функција случајне функције.....	283
	8.3.1. Питања за понављање. Задаци. Примери.....	288
8.4.	Операције над случајним функцијама.....	295
	8.4.1. Појам линеарног оператора.....	295
	8.4.2. Линеарне трансформације случајних функција.....	297
	8.4.2.1. Извод случајне функције.....	298
	8.4.2.2. Интеграл случајне функције.....	300
	8.4.3. Питања за понављање. Задаци.....	303
8.5.	Класификација случајних процеса.....	305
	8.5.1. Процеси са независним прираштакима.....	305
	8.5.2. Процеси Маркова.....	306
	8.5.3. Стационарни процеси.....	307
	8.5.4. Поасонови процеси.....	307
8.6.	Ланци Маркова.....	310
	8.6.1. Уводне напомене.....	310
	8.6.2. Вектор вероватноћа. Стохастичка матрица.....	311
	8.6.3. Задаци.....	314
	8.6.4. Ланци Маркова. Матрица прелазних вероватноћа.....	316
	8.6.5. Класификација стања и ланаца Маркова.....	323
	8.6.6. Задаци.....	329

II део МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА

Глава 9

	СТАТИСТИЧКА АНАЛИЗА.....	333
9.1.	Дефиниције и основни појмови математичке статистике.....	333
9.2.	Формирање статистичких табела. Хистограми и полигони емпиријске расподеле фреквенција.....	339
9.3.	Карактеристике емпиријске расподеле.....	344

9.3.1. Аритметичка средина, медијана, мода и друге карактеристике центра растурања	344
Задаци	354
9.3.2. Стандардно одступање и друге мере растурања (дисперзије)	364
Задаци	369
9.3.3. Моменти, асиметрија и спљоштеност	371
Задаци	373

Глава 10

МЕТОДА УЗОРАКА	377
10.1. Елементарна теорија узорака (велики узорци)	377
10.2. Расподела вероватноћа неких статистика	378
10.2.1. Расподела аритметичких средина узорака	378
Задаци	382
10.2.2. Расподела фреквенција у узорцима	383
Задаци	386
10.2.3. Емпиријска расподела разлике и збира статистика	387
Задаци	389
10.3. Стандардна грешка неких статистика	390
Задаци	394

Глава 11

ТЕОРИЈА ОЦЕНА	397
11.1. Тачкасте оцене	398
11.1.1. Тачкасте оцене. Метода момената. Шепардова корекција момента	398
11.1.2. Класификација тачкастих оцена	400
Задаци	413
11.1.3. Метода максималне веродостојности	417
Задаци	423
11.2. Интервалне оцене	424
11.2.1. Интервал поверења за средњу вредност основне нормалне популације чија је дисперзија позната	426
Задаци	429
11.2.2. Интервал поверења за средњу вредност основне нормалне популације чија је дисперзија непозната	431
Задаци	433
11.2.3. Интервал поверења дисперзије основне нормалне популације	435
Задаци	440
11.2.4. Интервал поверења за параметар p биномне расподеле	441
Задаци	443
11.2.5. Интервал поверења разлике и збира статистика	444
Задаци	446

Глава 12

ВЕРИФИКАЦИЈА СТАТИСТИЧКИХ ХИПОТЕЗА	449
12.1. Појам статистичке хипотезе	449
12.1.1. Дефиниција и класификација хипотеза	449
12.1.2. Врсте алтернативних хипотеза. Врсте грешака у тестирању	452
Задаци	456
12.2. Тестирање параметарских хипотеза	458
12.2.1. Тестирање хипотезе о средњој вредности	458
Задаци	461
12.2.2. Тестирање једнакости средњих вредности два основна скупа помоћу њихових узорака	465
Задаци	467
12.2.3. Тестирање хипотеза у вези с пропорцијама основног скупа на основу узорака	469
Задаци	475
12.2.4. Тестирање хипотезе о једнакости дисперзија нормалних скупова	480
Задаци	481
12.3. Тестирање непараметарских хипотеза	483
12.3.1. Тест хи-квадрат за верификацију непараметарских хипотеза	484
Задаци	492
12.3.2. Тест λ Колмогорова за верификацију непараметарских хипотеза	498
Задаци	502
12.3.3. Примена нормалног папира за тестирање хипотезе о нормалној расподели	506
12.4. Дисперзиона анализа	508
12.4.1. Дисперзиона анализа у случају једноструке класификације	509
Задаци	515
12.4.2. Дисперзиона анализа у случају двоструке класификације	517
Задаци	521
12.5. Тест независности	523
Задаци	527

Глава 13

ТЕОРИЈА КОРЕЛАЦИЈЕ	529
13.1. Метода најмањих квадрата	529
Задаци	540
13.2. Корелација. Коефицијент корелације	542
Задаци	553
13.3. Метод узорака у теорији корелације	555
Задаци	560
13.4. Вишеструка и парцијална корелација	561
Задаци	572

Глава 14

АНАЛИЗА ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА	575
14.1. Предмет анализе временских серија	575
14.2. Елементарно описивање временских серија	577
14.3. Изравнање временских серија помоћу покретних средина	579
14.4. Изравнање временских серија помоћу адаптивних покретних средина	584
14.5. Аналитичко изравнање временске серије	587
14.6. Интервалне оцене тренда и екстраполација тренда	595
Задачи	602
14.6. Интервалне оцене тренда и екстраполација тренда	595
Задачи	602

ПРИЛОГ – СТАТИСТИЧКЕ ТАБЕЛЕ

Табела I.	Вероватноће биномне расподеле	607
Табела II.	Вероватноће Пуасонове расподеле	610
Табела III.	Вредности функције густине нормиране нормалне расподеле	612
Табела IV.	Вредности Лапласове функције	613
Табела V.	Вредности χ^2_α за које је $P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha$	614
Табела VI.	Расподела t Студента. Вредности t_α за које је испуњена релација $P(t > t_\alpha) = \alpha$	615
Табела VII.	Вредности F_0 за које је $P(F > F_0) = 0,05$	616
Табела VIII.	Расподела α Колмогорова-Смирнова	618
Табела IX.	Вредности K^* (линеарни тренд) за $1 - \alpha = 0,90$	619
Табела X.	Случајни бројеви	620

ЛИТЕРАТУРА	625
------------------	-----

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ ИЗ МАТЕМАТИЧКЕ СТАТИСТИКЕ	627
---	-----

БЕЛЕШКА О АУТОРИМА	635
--------------------------	-----

ПРЕДГОВОР

1. Саобраћајни инжењер у својој пракси користи разноврстан математички апарат при решавању конкретних проблема. Значај математичких метода нагло је порастао појавом савремених рачунских машина. Један од циљева овог уџбеника је да се код читаоца формира основа за анализу и управљање саобраћајним процесима са аспекта математичко-статистичког моделирања. Сматрамо да је способност да се овако приступи саобраћајним проблемима такође једна од веома битних карактеристика савременог инжењера саобраћаја.

Садржај уџбеника је подељен у два дела. У првом се излажу основни појмови и закони теорије вероватноће, а у другом делу су основне методе математичке статистике које су значајне за примену у саобраћају. Просторно премештање путника и робе као и циркулација транспортних средстава описује се различитим обележјима чије се законитости варирања уочавају у маси, па је отуда математичка статистика јединствен математички апарат за њихову анализу. Карактеристике и законитости таквих масовних појава у саобраћају, добијени методама математичке статистике, могу да буду од изузетне користи за потпуније схватање и решавање конкретних проблема саобраћаја. У савременом планирању и прогнозирању саобраћаја у великој мери се користе методе математичке статистике.

2. Шесто издање уџбеника "Елементи теорије вероватноће и математичке статистике" (С. Вукадиновић, издање Привредног прегледа, 1990) је распродато. Сарађујући на предмету Математичка статистика припремили смо уџбеник са једноставнијим називом и прилагодили садржај новом програму овог предмета.

Такође је распродата и "Збирка решених задатака из теорије вероватноће" (С. Вукадиновић, VI издање Привредног прегледа, 1990), као и "Збирка решених задатака из математичке статистике" (С. Вукадиновић, J.

Поповић, II издање Научне књиге, 1988), па смо их прерадили у један уџбеник под називом "Збирка решених задатака из математичке статистике". И овај уџбеник ће се појавити у току 1996. године у издању Саобраћајног факултета.

3. Треба рећи да када се аутори враћају првом издавачу, а то је у овом случају Саобраћајни факултет (јер су прве верзије поменути три уџбеника штампане у облику скрипата на Саобраћајном факултету), онда признају да су грешили што су у протеклим деценијама поверавали штампање ових уџбеника познатим издавачким кућама у Београду.

Београд, 4. априла 1995.

Аутори